Uitwerkingen CCVW Wiskunde B 16-12-2022

Vraag 1a - 6 punten

$f(x)=4\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{x+4}\cdot\sqrt{12-x^2}=4\sqrt{3} \Rightarrow (x+4)(12-x^2)=\left(4\sqrt{3}\right)^2=48$

... $\Leftrightarrow 12x-x^3+48-4x^2=48 \Leftrightarrow -x^3-4x^2+12x=0$

... $\Leftrightarrow -x(x^2+4x-12)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x^2+4x-12=0$

$x^2+4x-12=0 \Leftrightarrow (x+6)(x-2)=0 \Leftrightarrow x=-6 \vee x=2$

$f(-6)$ bestaat niet. de snijpunten zijn dus $\left(0,4\sqrt{3}\right)$ en $\left(2,4\sqrt{3}\right)$

Vraag 1b - 5 punten

$g(x)=\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{7-x^2}$ geeft $g'(x)=\frac{\sqrt{7-x^2}}{2\sqrt{x+2}}-\frac{x\sqrt{x+2}}{\sqrt{7-x^2}}$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{7-x^2}}{2\sqrt{x+2}}=\dfrac{x\sqrt{x+2}}{\sqrt{7-x^2}} \Rightarrow 7-x^2=2x(x+2) \Leftrightarrow 7-x^2=2x^2+4x \Leftrightarrow 3x^2+4x-7=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-4\pm\sqrt{100}}{6} \Leftrightarrow x=1 \vee x=-\frac{7}{3}$

$g\left(-\frac{7}{3}\right)$ bestaat niet, voor het maximum geldt dus:$x=1$ en $y=g(1)=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

Alternatief 1:

$g(x)=\sqrt{(x+2)(7-x^2)}=\sqrt{-x^3-2x^2+7x+14}$ geeft $g'(x)=\frac{-3x^2-4x+7}{2\sqrt{-x^3-2x^2+7x+14}}$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2-4x+7=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{100}}{-6} \Leftrightarrow x=1 \vee x=-\frac{7}{3}$

$g\left(-\frac{7}{3}\right)$ bestaat niet, voor het maximum geldt dus:$x=1$ en $y=g(1)=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

Alternatief 2:

Aangezien $g(x)\geq 0$ is $g(x)$ maximaal als $\left(g(x)\right)^2$ maximaal is

.$\left(g(x)\right)^2=(x+2)(7-x^2)=-x^3-2x^2+7x+14$, dus $g-(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2-4x+7=0$ etc.

Vraag 1c - 6 punten

Te berekenen: $\pi\int_{-5}^{4}\left(k(x)\right)^2\,\mathrm{d}x-\pi\int_{-5}^{4}\left(h(x)\right)^2\,\mathrm{d}x$

$\int_{-5}^{4}\left(k(x)\right)^2\,\mathrm{d}x=\int_{-5}^{4}25-x^2\,\mathrm{d}x=\left[25x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-5}^{4}=100-\frac{64}{3}-\left(-125+\frac{125}{3}\right)=225-\frac{189}{3}=162$

$\int_{-5}^{4}\left(h(x)\right)^2\,\mathrm{d}x=\int_{-5}^{4}x+5\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}x^2+5x\right]_{-5}^{4}=8+20-\left(12\frac{1}{2}-25\right)=40\frac{1}{2}$

De inhoud is dus $162\pi-40\frac{1}{2}\pi=121\frac{1}{2}\pi$

Vraag 1d - 3 punten

Er is een verticale asymptoot als $\sqrt{x+a}=0 \Leftrightarrow x=-a$ en $\sqrt{16-x^2}\neq 0$.

$\sqrt{16-x^2}\neq 0$ als $\sqrt{16-x^2}$ bestaat en niet gelijk is aan 0, dat is als $16-x^2>0 \Leftrightarrow -4<x<4$

Omdat $q_a(x)$ sowieso niet bestaat als $x<-4$ en als $x>4$ is er geen horizontale of scheve asymptoot.

Voor $-4<a<4$ heeft de grafiek een verticale asymptoot voor $x=-a$

Vraag 2a - 6 punten

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 9 - 4\mathrm{e}^{2x} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow 2x = \ln\left(\frac{9}{4}\right) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{9}{4}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

Te berekenen is dus $\int_0^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} 9 - 4\mathrm{e}^{2x}\ \mathrm{d}x = \left[9x - 2\mathrm{e}^{2x}\right]_0^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} = 9\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 2 \cdot \frac{9}{4} - (0 - 2) = 9\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{5}{2}$

Vraag 2b - 6 punten

$f'(x) = -8\mathrm{e}^{2x}$, dit geeft $f'(0) = -8$

De hoek die de raaklijn maakt met de *x*-as is dus $\tan^{-1}(-8) \approx -83°$

De lijn door *O* en *B* heeft richtingscoëfficiënt 8

De hoek die de raaklijn maakt met de *x*-as is dus $\tan^{-1}(8) \approx 83°$

De stompe hoek tussen deze lijnen is dus $2 \times 83° = 166°$
de scherpe hoek tussen deze lijnen is zodoende $180° - 166° = 14°$

Alternatief

$f'(x) = -8\mathrm{e}^{2x}$, dit geeft $f'(0) = -8$

De richtingsvector van de raaklijn is dus $\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$

De richtingsvector van de lijn door *O* en *B* is $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

Dit geeft $\cos(\alpha) = \frac{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}\right)}{\sqrt{1+(-8)^2}\cdot\sqrt{1+8^2}} = \frac{1-64}{65} = -\frac{63}{65}$

Hieruit volgt $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{63}{65}\right) \approx 166°$

Vraag 2c - 6 punten

$g'(x) = \dfrac{2x+6}{x^2+6x+18} \Rightarrow g''(x) = \dfrac{2(x^2+6x+18) - (2x+6)(2x+6)}{(x^2+6x+18)^2}$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x^2+6x+18) - (2x+6)(2x+6) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 12x + 36 - 4x^2 - 24x - 36 = 0$

$\Leftrightarrow -2x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow -2x(x+6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -6$

Vraag 3a - 6 punten

$f(x) = 4\sin(x)\cos(x)$ geeft $f\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 4\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}$

en $f'(x) = 4\cos(x)\cos(x) - 4\sin(x)\sin(x)$, dus $f'\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 - 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3 - 1 = 2$

Invullen van $x = \frac{1}{6}\pi$, $y = \sqrt{3}$ en $a = 2$ in $y = ax + b$ geeft $\sqrt{3} = \frac{1}{3}\pi + b \Leftrightarrow b = -\frac{1}{3}\pi + \sqrt{3}$.

De vergelijking van de raaklijn is dus $y = 2x - \frac{1}{3}\pi + \sqrt{3}$

Alternatief:

$f(x) = 2\cdot 2\sin(x)\cos(x) = 2\sin(2x)$ geeft $f\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 2\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}$

en $f'(x) = 2\cos(2x)\cdot 2 = 4\cos(2x)$, dus $f'\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 4\cdot\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 4\cdot\frac{1}{2} = 2$

Invullen van $x_0 = \frac{1}{6}\pi$, $y_0 = \sqrt{3}$ en $a = 2$ in $y - y_0 = a(x - x_0)$ geeft

$y - \sqrt{3} = 2\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) \Leftrightarrow y = 2x - \frac{1}{3}\pi + \sqrt{3}$

Vraag 3b - 3 punten

$F'(x) = 2\sin(2x) = 2\cdot 2\sin(x)\cos(x) = 4\sin(x)\cos(x) = f(x)$

Alternatief:

$2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$, dus $f(x) = 2\sin(2x)$

Een primitieve hiervan is $2\cdot\frac{1}{2}\cdot -\cos(2x) = -\cos(2x)$

Vraag 3c - 6 punten

$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} f(x)\ \mathrm{d}x = [-\cos(2x)]_0^{\frac{1}{4}\pi} = -0 - (-1) = 1$

$y_B = f\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 4\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} = 2$

De oppervlakte van de driehoek *OCB* met $C\left(\frac{1}{4}\pi, 0\right)$ is $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\pi\cdot 2 = \frac{1}{4}\pi$

De oppervlakte van *V* is dus $1 - \frac{1}{4}\pi$

Alternatief:

$y_B = f\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 4\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} = 2$, de vergelijking van lijn ℓ is dus $y = \frac{2-0}{\frac{1}{4}\pi - 0}x \Leftrightarrow y = \frac{8}{\pi}x$

Te berekenen is dus $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} f(x) - \frac{8}{\pi}x\ \mathrm{d}x = \left[-\cos(2x) - \frac{4}{\pi}x^2\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} = 0 - \frac{1}{4}\pi - (-1 - 0) = 1 - \frac{1}{4}\pi$

Vraag 3d - 7 punten

$g'(x) = \cos(\pi\cdot\cos(x))\cdot\pi\cdot -\sin(x)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(\pi\cdot\cos(x)) = 0 \vee \sin(x) = 0$

$\cos(\pi\cdot\cos(x)) = 0 \Leftrightarrow \pi\cdot\cos(x) = \frac{1}{2}\pi + k\cdot\pi \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{1}{2} + k \Leftrightarrow \cos(x) = \pm\frac{1}{2}$

$\cos(x) = \frac{1}{2}$ geeft $x = \frac{1}{3}\pi \vee x = 1\frac{2}{3}\pi$ en $y = 1$

$\cos(x) = -\frac{1}{2}$ geeft $x = \frac{2}{3}\pi \vee x = 1\frac{1}{3}\pi$ en $y = -1$

$\sin(x) = 0$ geeft $x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi$ en $y = 0$

Vraag 4a - 6 punten

Het middelpunt van c_1 is $(3,-1)$ en de straal is $\sqrt{25}=5$
We zoeken twee horizontale lijnen met afstand $5+2=7$ tot $(3,-1)$.
Dit zijn de lijnen $y=-1+7=6$ en $y=-1-7=-8$

Berekening snijpunten met de vectorvoorstelling van m:

$y=6$ invullen in de vectorvoorstelling van *m* geeft

$$\begin{pmatrix}x\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1+3\lambda\\6=-4+4\lambda\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\lambda=10\\x=-1+3\lambda\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=\frac{5}{2}\\x=-1+3\cdot\frac{5}{2}=\frac{13}{2}\end{cases}$$

$y=-8$ invullen in de vectorvoorstelling van *m* geeft

$$\begin{pmatrix}x\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1+3\lambda\\-8=-4+4\lambda\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\lambda=-4\\x=-1+3\lambda\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=-1\\x=-1+3\cdot-1=-4\end{cases}$$

Berekening snijpunten met de vergelijking van m:

Voor lijn *m* geldt: $x=-1+3\lambda\Leftrightarrow 3\lambda=x+1\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

Dit geeft $y=-4+4\lambda=-4+\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}=\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}$

Ook: m is de lijn met richtingscoëfficiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{4}{3}$ *door* $(-1,-4)$,

De vergelijking van lijn *m* is dus $y=\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}$

$y=6$ geeft dan $6=\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}\Leftrightarrow\frac{4}{3}x=\frac{26}{3}\Leftrightarrow x=\frac{26}{4}=\frac{13}{2}$

$y=-8$ geeft dan $-8=\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}\Leftrightarrow\frac{4}{3}x=-\frac{16}{3}\Leftrightarrow x=\frac{-16}{4}=-4$,

De snijpunten zijn zodoende $\left(\frac{13}{2},6\right)$ en $(-4,-8)$

Afstand: $\sqrt{\left(\frac{13}{2}--4\right)^2+(6--8)^2}=\sqrt{\frac{441}{4}+196}=\sqrt{\frac{1225}{4}}=\frac{35}{2}$

Vraag 4b met vectorvoorstelling lijn door M loodrecht op m - 5 punten

De raaklijnen in de gezochte punten staan loodrecht op de lijn door het middelpunt *M* van c_1 die loodrecht op *m* staat.

Het middelpunt van c_1 is $(3,-1)$ en een richtingsvector van een lijn loodrecht op *m* is $\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$

De vectorvoorstelling van de lijn door *M* loodrecht op *m* is dus $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$

Invullen van $x=3-4\lambda$ en $y=-1+3\lambda$ in de vergelijking van c_1 geeft

$(-4\lambda)^2+(3\lambda)^2=25\Leftrightarrow 25\lambda^2=25\Leftrightarrow\lambda^2=1\Leftrightarrow\lambda=\pm1$

$\lambda=1$ geeft $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, dus raakpunt $(-1,2)$

$\lambda=-1$ geeft $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}$, dus raakpunt $(7,-4)$

Vraag 4b met vergelijking lijn door M loodrecht op m - 5 punten

De raaklijnen in de gezochte punten staan loodrecht op de lijn door het middelpunt van c_1 die loodrecht op *m* staat.

De richtingscoëfficiënt van *m* is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{3}$

De lijn loodrecht op *m* door $M(3, -1)$ heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{3}{4}$

Een vergelijking van deze lijn is $y + 1 = -\frac{3}{4}(x - 3)$ $\left(\Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}\right)$

Dit invullen in de vergelijking van c_1 geeft $(x-3)^2 + \left(-\frac{3}{4}(x-3)\right)^2 = 25 \Leftrightarrow \frac{25}{16}(x-3)^2 = 25$

of $(x-3)^2 + \left(-\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}\right)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{27}{8}x + \frac{81}{16} = 25$

Beide geven $\frac{25}{16}x^2 - \frac{150}{16}x + \frac{225}{16} = 25 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 16 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 = 0$

Hieruit volgt $x = -1 \Rightarrow y = -\frac{3}{4} \cdot -1 + \frac{5}{4} = 2$ of $x = 7 \Rightarrow y = -\frac{3}{4} \cdot 7 + \frac{5}{4} = -4$

Vraag 4c - 6 punten

N ligt op afstand $8\sqrt{2}$ van de oorsprong $O(0,0)$, dus geldt $x_N^2 + y_N^2 = \left(8\sqrt{2}\right)^2 = 128$

N ligt ook op lijn *m*. Dit geeft $x_N = -1 + 3\lambda$ en $y_N = -4 + 4\lambda$

Samen met $x_N^2 + y_N^2 = 128$ geeft dit $(-1 + 3\lambda)^2 + (-4 + 4\lambda)^2 = 128$

$\Leftrightarrow 1 - 6\lambda + 9\lambda^2 + 16 - 32\lambda + 16\lambda^2 = 128 \Leftrightarrow 25\lambda^2 - 38\lambda - 111 = 0$

Hieruit volgt $\lambda = \frac{38 \pm \sqrt{12544}}{50} = \frac{38 \pm 112}{50} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{37}{25}$ $(= -1{,}48) \vee \lambda = 3$

$\lambda = -\frac{37}{25}$ geeft $p = y_N = -4 + 4\lambda = -4 + 4 \cdot -\frac{37}{25} = -\frac{248}{25}$ $(= -9{,}92)$

$\lambda = 3$ geeft $p = y_N = -4 + 4\lambda = -4 + 4 \cdot 3 = 8$

Alternatief:

N ligt op afstand $8\sqrt{2}$ van de oorsprong $O(0,0)$, dus geldt $x_N^2 + y_N^2 = \left(8\sqrt{2}\right)^2 = 128$

N ligt ook op lijn *m*. Dit geeft $x_N = -1 + 3\lambda$ en $y_N = -4 + 4\lambda$

$y_N = p$ geeft dan $p = -4 + 4\lambda \Leftrightarrow 4\lambda = p + 4 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{4}p + 1$

$x_N = -1 + 3\lambda$ geeft vervolgens $x_N = -1 + 3\left(\frac{1}{4}p + 1\right) = \frac{3}{4}p + 2$

Samen met $x_N^2 + y_N^2 = 128$ volgt hieruit:

$\left(\frac{3}{4}p + 2\right)^2 + p^2 = 128 \Leftrightarrow \frac{9}{16}p^2 + 3p + 4 + p^2 = 128 \Leftrightarrow \frac{25}{16}p^2 + 3p - 124 = 0$

$\Leftrightarrow p = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 775}}{\frac{25}{8}} = \frac{-3 \pm 28}{\frac{25}{8}} \Leftrightarrow p = \frac{25}{\frac{25}{8}} = 8 \vee p = -\frac{31}{\frac{25}{8}} = -\frac{248}{25} = -9{,}92$

Vraag 4d - 4 punten

$d(P,Q) = \sqrt{(6-0)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

Dit is twee keer de straal van c_1, dus is PQ een middellijn van c_1

Thales zegt dan dat $\angle PRQ = 90°$

Uit $\angle PQR + \angle QPR + \angle PRQ = 180°$ volgt dan $\angle QPR = 180° - 30° - 90° = 60°$